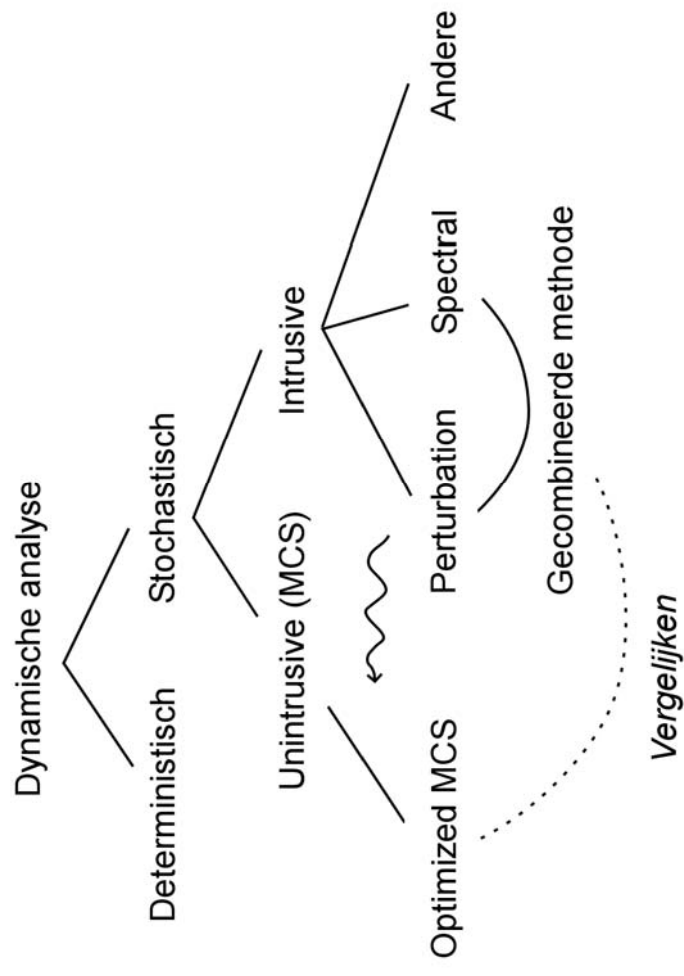
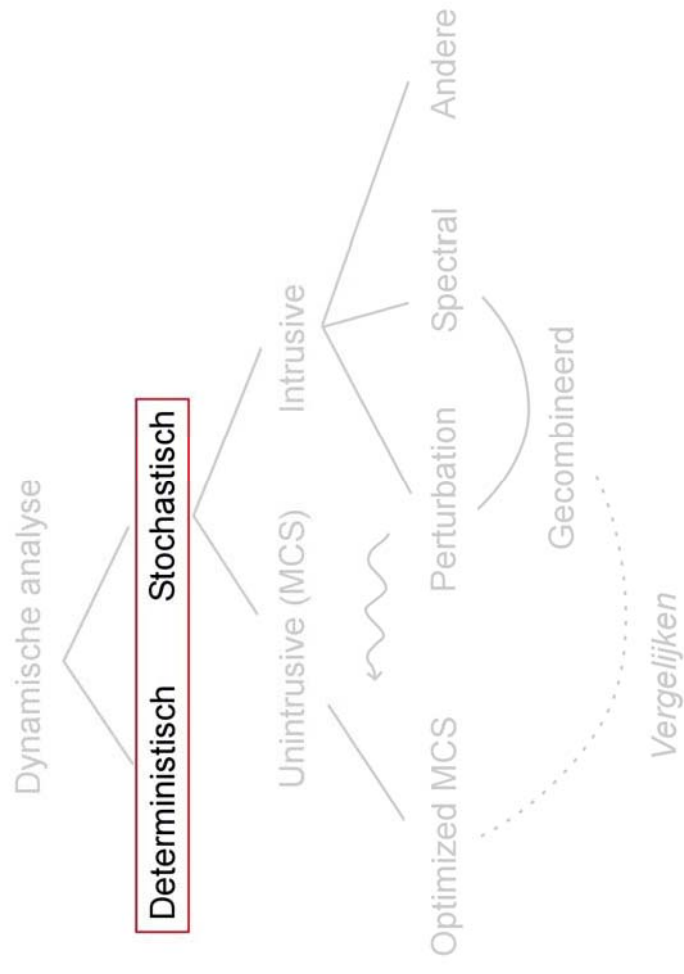


The Stochastic Finite Element Method (SFEM)

Intrusive formulations and an application in
Structural Dynamics

Rein de Vries
28-11-2013 (DIANA Users Association)





Modelleren met onzekerheid

Modelleren met onzekerheid

Waar komt de onzekerheid vandaan?

- Belastingen
- Materialen
- Geometrie

Veroorzaakt door:

- Onzekere toekomst
- Natuurlijke invloeden
- Menselijke fouten

Hoe gaan we er mee om?

- Toetsing m.b.v. Eurocode/ISO/ASCE
- Direct meenemen in berekening → *stochastische analyse*



Fig. 1: Betonnen balken

Modelleren met onzekerheid

Stochastische variabele

*Een variabele welke verschillende waarden kan aannemen,
elke waarde geassocieerd met een bepaalde kans.*

Voorbeelden:

- Lengte van de mens
- Treksterkte van een bout
- Duur van deze presentatie
- etc.

We onderscheiden:

- Discrete stochasten
- Continue stochasten $\rightarrow$ makkelijk rekenen

De stochast X is een functie

$$X(\theta), \quad \theta \in \Omega \quad (1)$$

met element θ uit de uitkomstenruimte Ω .

Modelleren met onzekerheid

De *verdelingsfunctie* (CDF) is gedefinieerd als

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) \, dy \quad (2)$$

met de *kansdichtheidsfunctie* (PDF) als

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad f_X(x) \, dx = P(x < X \leq x + dx) \quad (3)$$

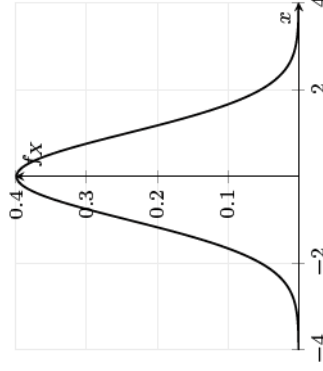


Fig. 2: Normal PDF

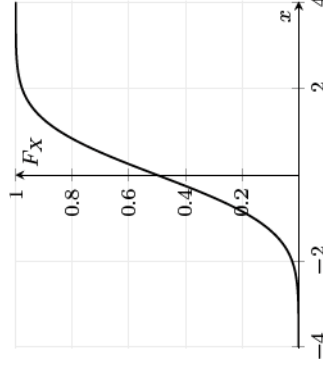


Fig. 3: Normal CDF

Modelleren met onzekerheid

Uitbreiding naar:

- *Stochastisch proces*: Afhankelijk van tijd (1D)

$$X(t, \theta), \quad t \in \mathcal{T}, \theta \in \Omega \quad (4)$$
- *Stochastisch veld*: Afhankelijk van plaats (1D, 2D, 3D)

$$H(\mathbf{x}, \theta), \quad \mathbf{x} = [x \ y \ z]^T, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \theta \in \Omega \quad (5)$$

Met de *correlatie* tussen twee punten

$$\rho_{XX}(t_1, t_2) = \rho_{XX}(\tau)$$

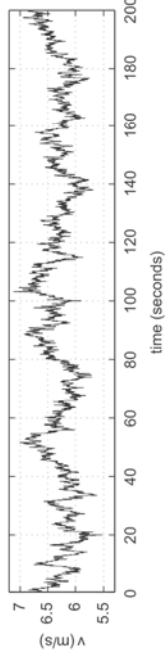


Fig. 4: Stochastisch proces (windsnelheid)

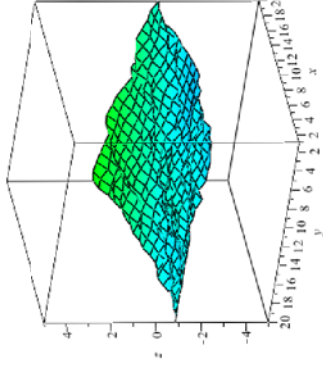
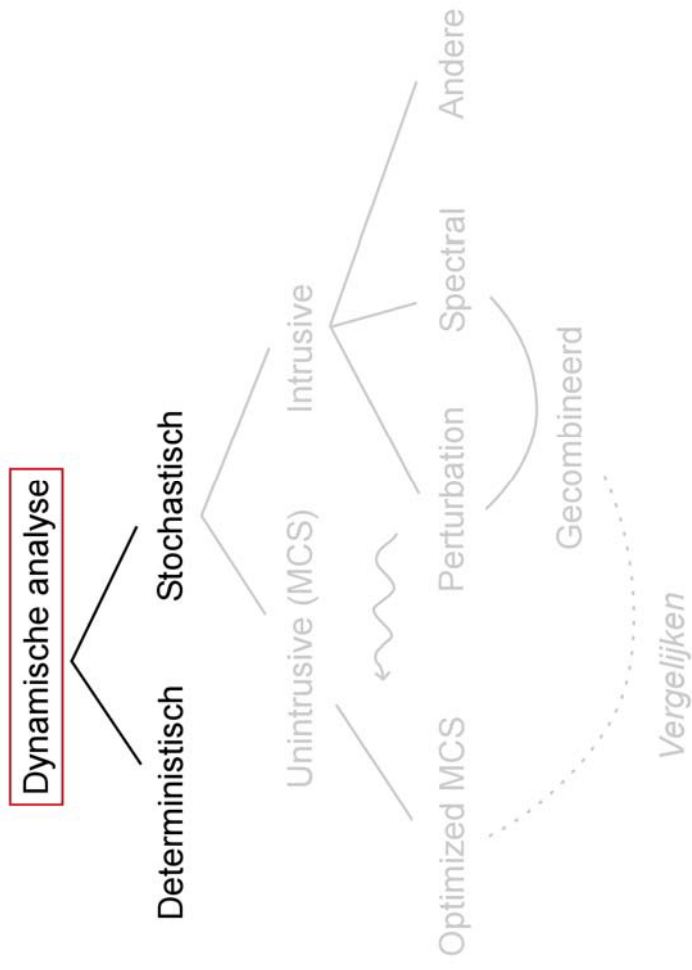


Fig. 5: Stochastisch veld



Modelleren met onzekerheid

FEM model leidt tot evenwichtsvergelijking (stelsel)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (6)$$

of Fourier-getransformeerd

$$(-\omega^2\mathbf{M} + i\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}} \Rightarrow \mathbf{A}\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (7)$$

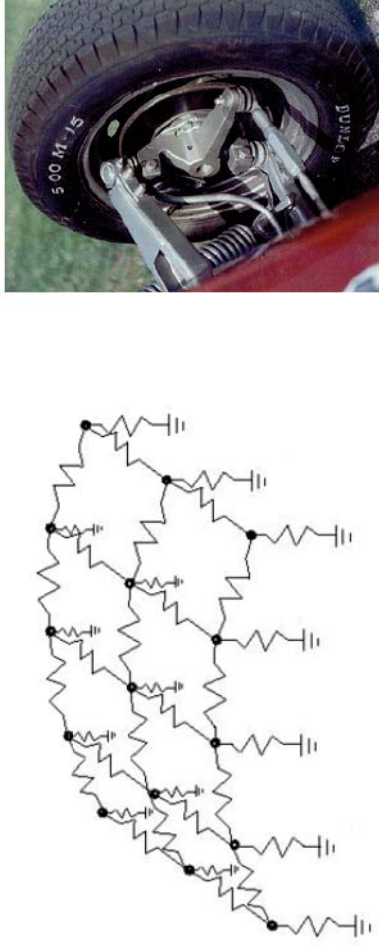
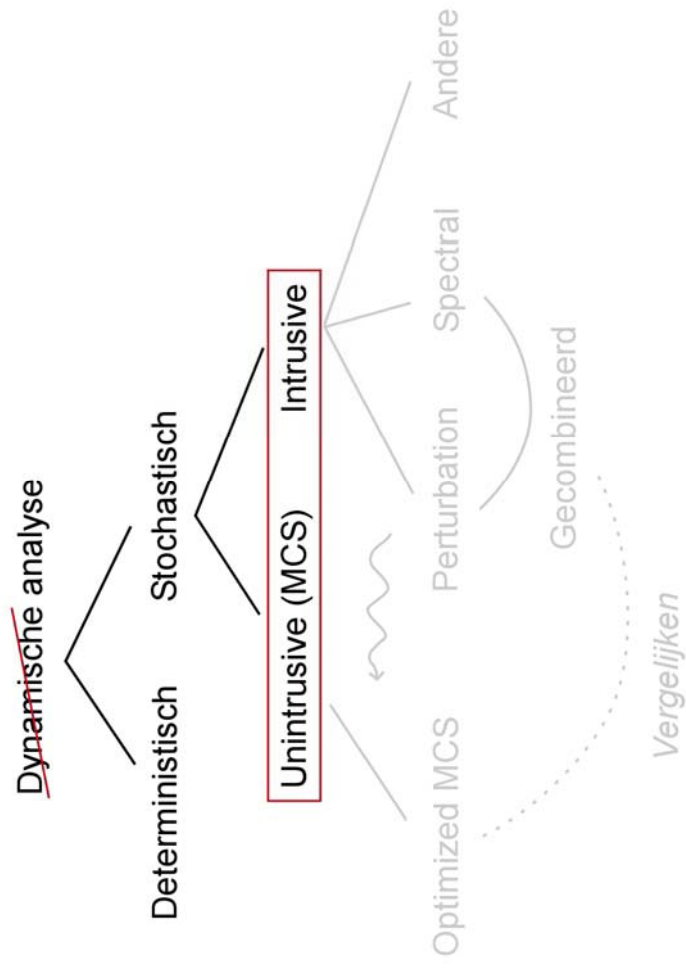


Fig. 6: FEM model



Fig. 7: Ophanging



Stochastic Finite Element Method (SFEM)

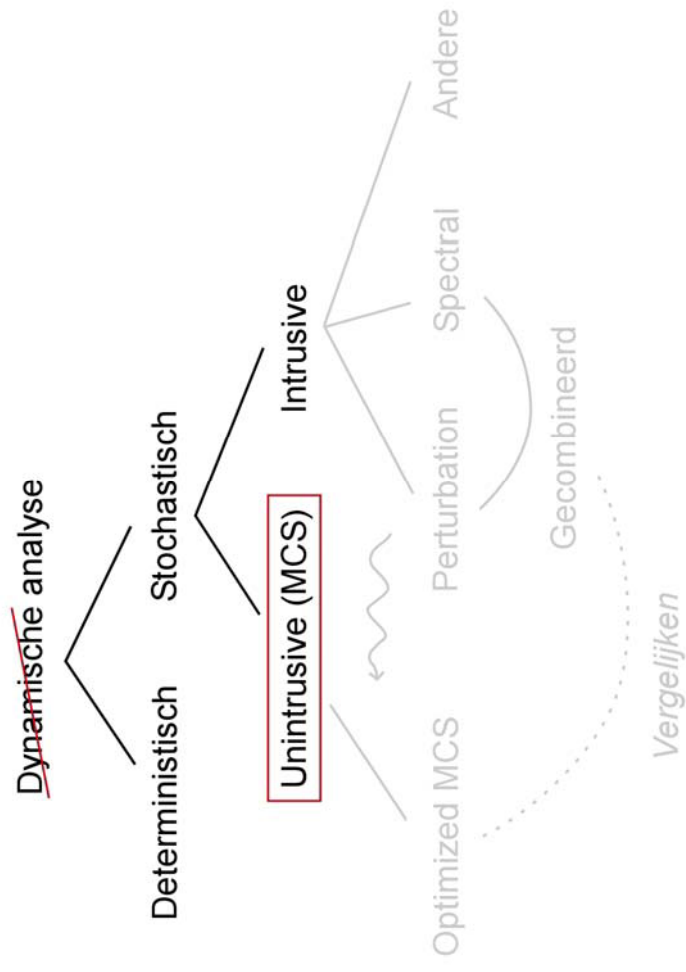
Stochastic Finite Element Method (SFEM)

Unintrusive methoden:

- Monte Carlo simulatie (MCS)
- Gebruik deterministische FEM-software ('black-box')
- Convergeert naar exacte oplossing
- Tijdrovend, zeker voor dynamica problemen

Intrusive methoden:

- Reeks-ontwikkeling / benadering
- Aangepaste FEM-code
- Volgens literatuur veelbelovend
 - alleen aangetoond voor kleinschalige berekeningen



Stochastic Finite Element Method (SFEM)

Monte Carlo simulatie

Algemene procedure:

1. Discretiseer stochastische velden
2. Voor de simulatie uit
 - Genereer realisatie van velden
 - Bouw de stijfheidsmatrix ($\mathbf{K}$)
 - Los op voor verplaatsingen ($\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$)
 - Bewaar interessante resultaten
3. Statistische nabewerking van resultaten

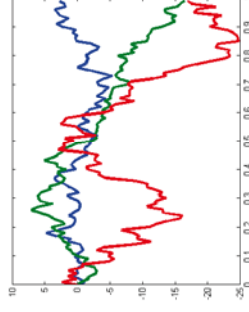


Fig. 8: Verschillende realisaties

Stochastic Finite Element Method (SFEM)

Voorbeeld uitkragende ligger

Elasticiteitsmodulus E met 20% variatie, normaal verdeeld

Met correlatiefunctie:

$$\rho(\Delta x) = \exp\left(-\frac{|\Delta x|}{L_c}\right)$$

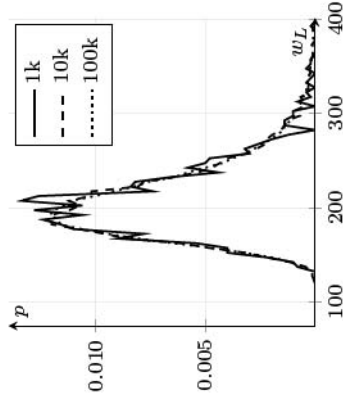


Fig. 9: Verplaatsing

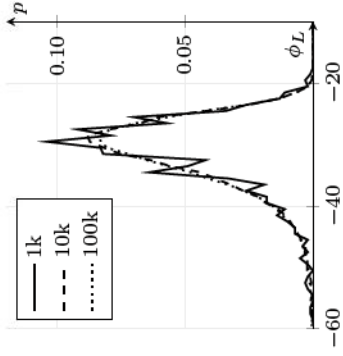
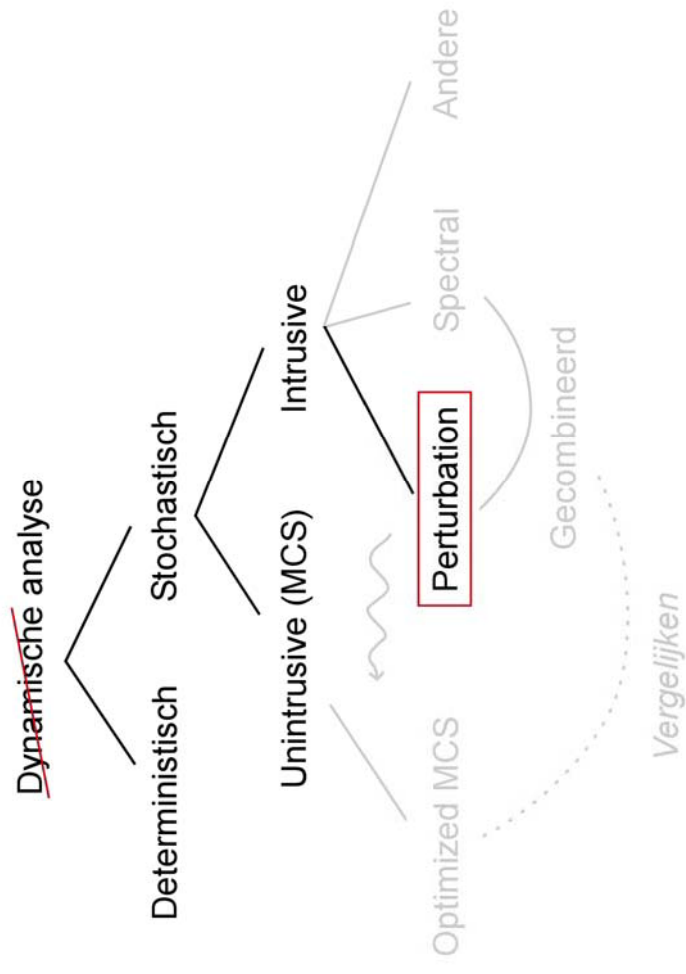


Fig. 10: Rotatie



Perturbation method (PSFEM)

Perturbation method

Gebaseerd op Taylor-reeks ontwikkeling

$$f(x) = f(a) + \frac{df}{dx} \Big|_{x=a} (x-a) + \frac{1}{2} \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{x=a} (x-a)^2 + \dots \quad (8)$$

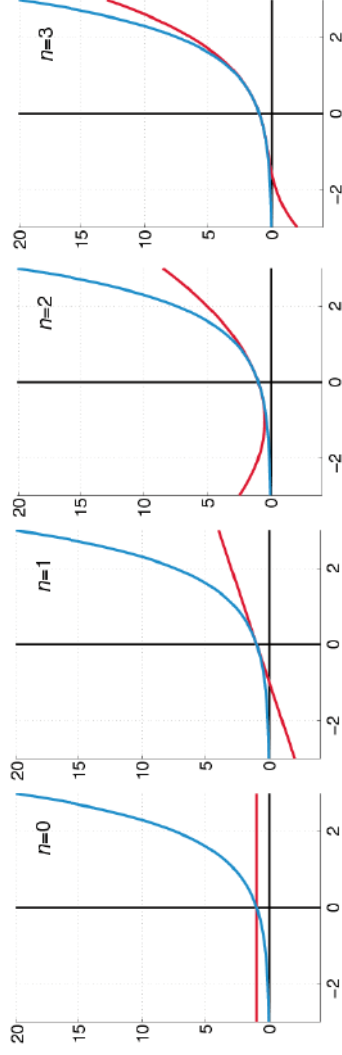


Fig. 11: Taylor-reeks rond $a = 0$

Perturbation method (PSFEM)

Het bekende systeem

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (9)$$

uitschrijven met 1e orde Taylor-reeks

$$\left(\mathbf{K}_0 + \sum_{i=1}^M \mathbf{K}_i^I \alpha_i \right) \left(\mathbf{u}_0 + \sum_{i=1}^M \mathbf{u}_i^I \alpha_i \right) = \mathbf{f}_0 + \sum_{i=1}^M \mathbf{f}_i^I \alpha_i$$

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{K}_0 \sum_{i=1}^M \mathbf{u}_i^I \alpha_i + \sum_{i=1}^M \mathbf{K}_i^I \alpha_i \mathbf{u}_0 + \sum_{i=1}^M \mathbf{K}_i^I \alpha_i \sum_{j=1}^M \mathbf{u}_j^I \alpha_j = \mathbf{f}_0 + \sum_{i=1}^M \mathbf{f}_i^I \alpha_i \quad (10)$$

Levert uiteindelijk

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{f}_0 \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_i^I = \mathbf{K}_0^{-1} (\mathbf{f}_i - \mathbf{K}_i^I \mathbf{u}_0) \quad (12)$$

Perturbation method (PSFEM)

Algemene procedure:

1. Schrijf systeem in basis stochasten (α_i)
2. Bereken de bijdrage vectoren ($\mathbf{u}_i^I, \mathbf{u}_{ij}^{II}, \dots$)
3. Bepaal de statistiek van respons

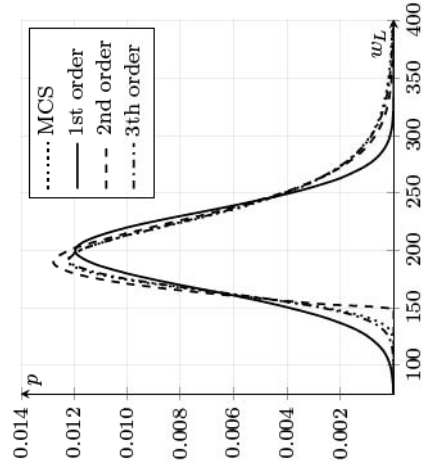


Fig. 12: $V = 20\%$

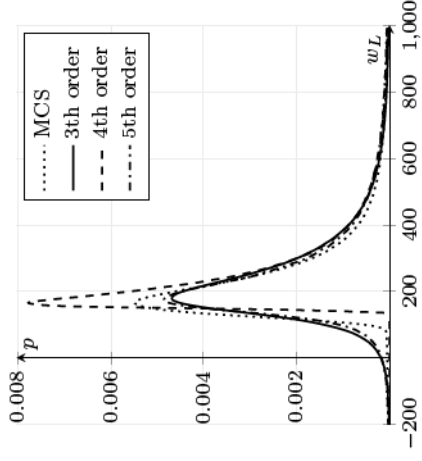
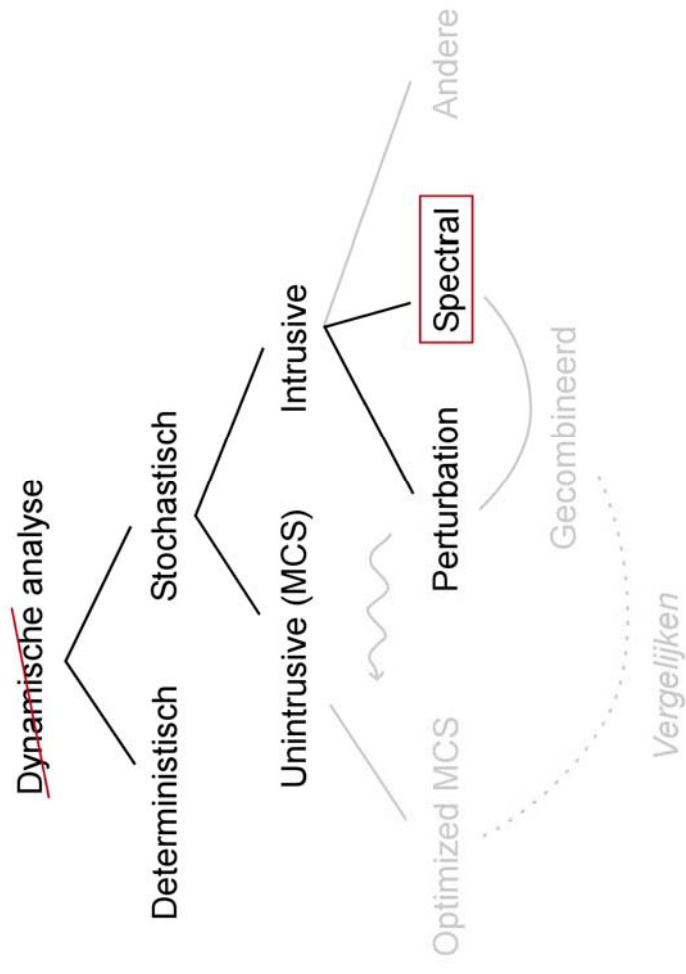


Fig. 13: $V = 50\%$



Spectral method (SSFEM)

Spectral method

Gebaseerd op spectrale decompositie & fout minimalisatie

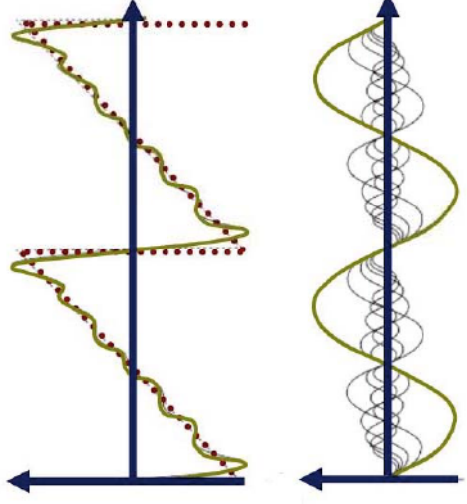


Fig. 14: Spectrale decompositie

Spectral method (SSFEM)

Karhunen-Loève expansion voor stijfheidsmatrix $\mathbf{K}$.

Deterministisch deel

$$\mathbf{K}_0^{(e)} = \int_{V_e} \mathbf{B}(\mathbf{x})^T \overline{\mathbf{D}}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \, dV_e \quad (13)$$

en stochastisch

$$\mathbf{K}_i^{(e)} = \sqrt{\lambda_i} \int_{V_e} \mathbf{B}(\mathbf{x})^T \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \, dV_e. \quad i = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Leidt tot systeem

$$\left\{ \mathbf{K}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{K}_i \xi_i(\theta) \right\} \mathbf{u}(\theta) = \mathbf{f}(\theta)$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{K}_i \xi_i(\theta) \mathbf{u}(\theta) = \mathbf{f}(\theta), \quad \xi_0 \equiv 1 \quad (15)$$

Spectral method (SSFEM)

Homogeneous Chaos expansion voor verplaatsingsvector $\mathbf{u}$.

Uitgedrukt in orthogonale *functionals* Ψ_i

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{u}_j \Psi_j(\boldsymbol{\xi}(\theta)) \quad (16)$$

Dan projecteren en fout minimaliseren (Galerkin)

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^M \mathbf{K}_i \xi_i(\theta) \sum_{j=0}^{P-1} \mathbf{u}_j \Psi_j(\theta) \Psi_k(\theta) \right] = \mathbb{E}[\mathbf{f}(\theta) \Psi_k(\theta)] \quad (17)$$

leidt tot *master system*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{0,0} & \cdots & \mathbf{K}_{0,P-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{P-1,0} & \cdots & \mathbf{K}_{P-1,P-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{P-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{P-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Spectral method (SSFEM)

Algemene procedure:

1. Splits stijfheidsmatrix m.b.v. KL-expansion ($\mathbf{K}, \mathbf{K}_i$)
2. Bepaal de Polynomial Chaos functionals (Ψ_i)
3. Los master system op ($\mathbf{u}_i$)

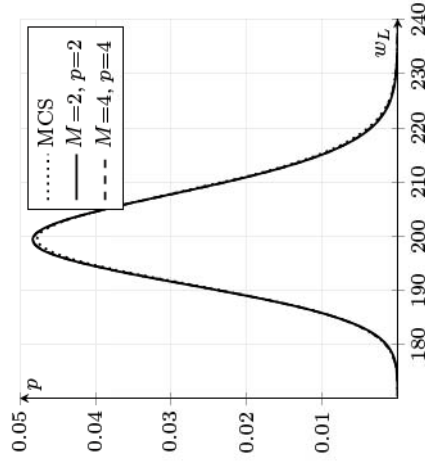


Fig. 15: $V = 5\%$

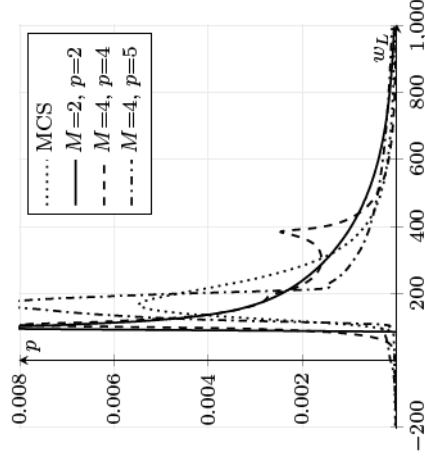
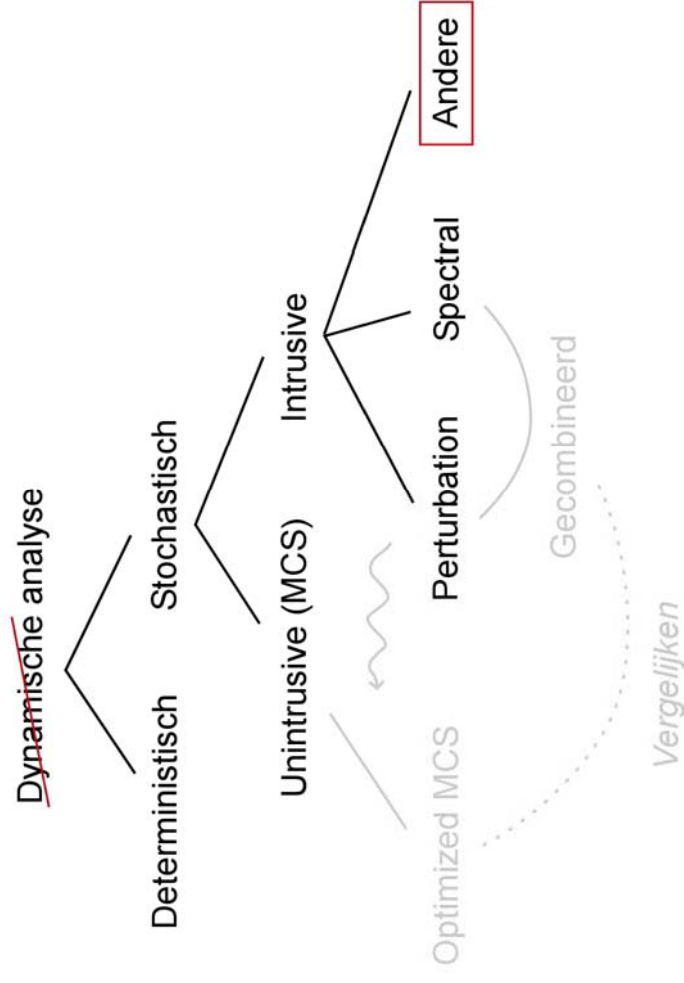
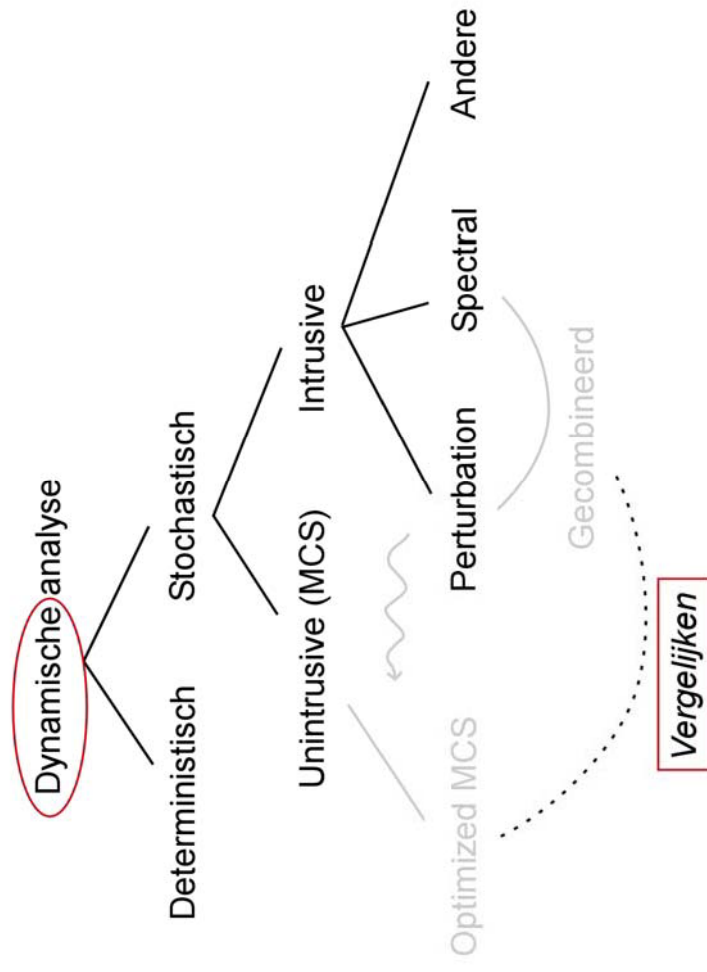


Fig. 16: $V = 50\%$





Case study

Case study



Fig. 17: Bebouwing nabij spoor

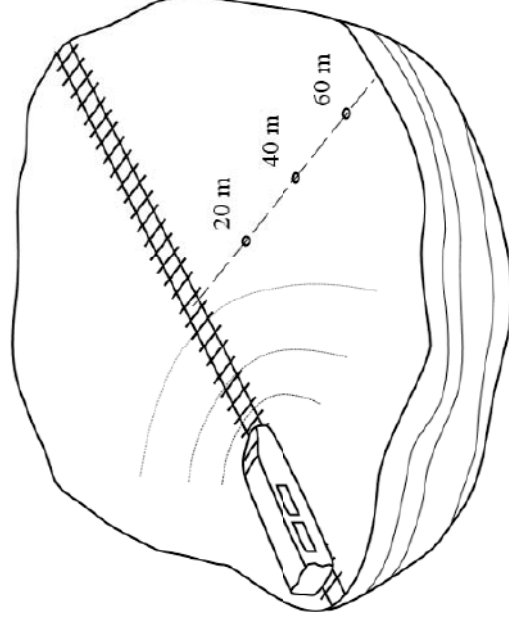


Fig. 18: Schematisch weergegeven

Case study



Fig. 19: Heterogeen karakter van grond

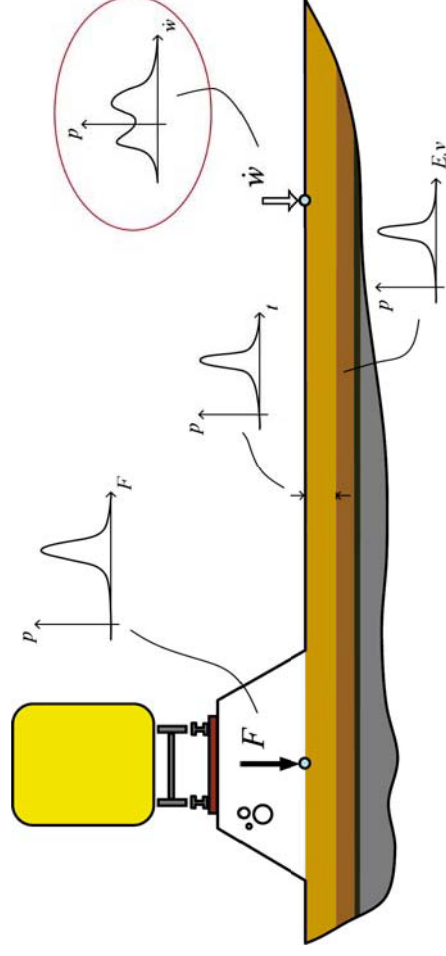


Fig. 20: Onzekerheid aanwezig in systeem

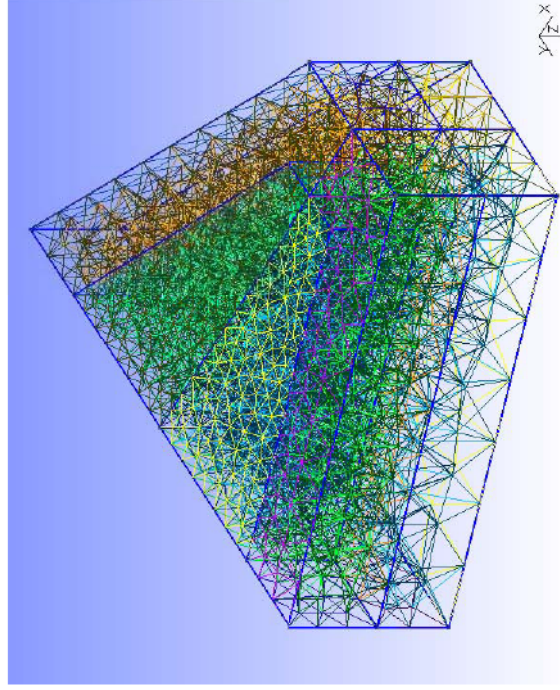


Fig. 21: Finite Element model

Case study

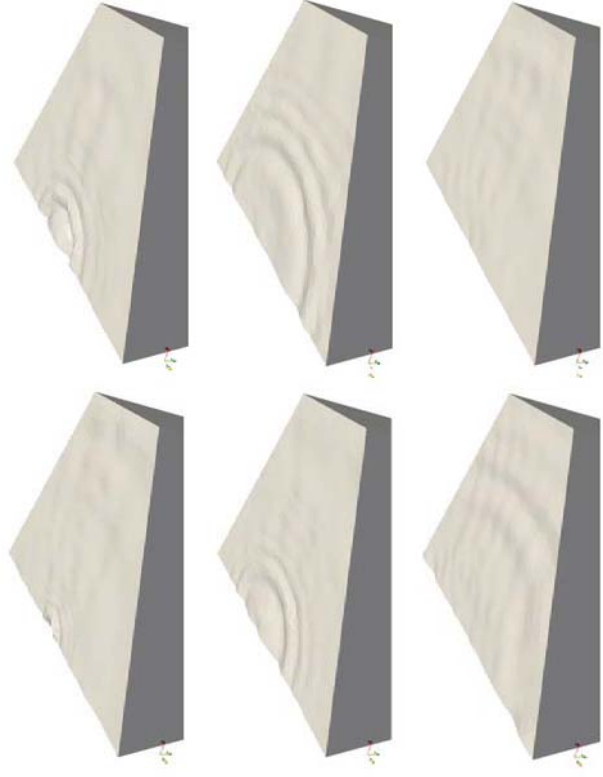


Fig. 22: Reflecties vanaf de zijkanten

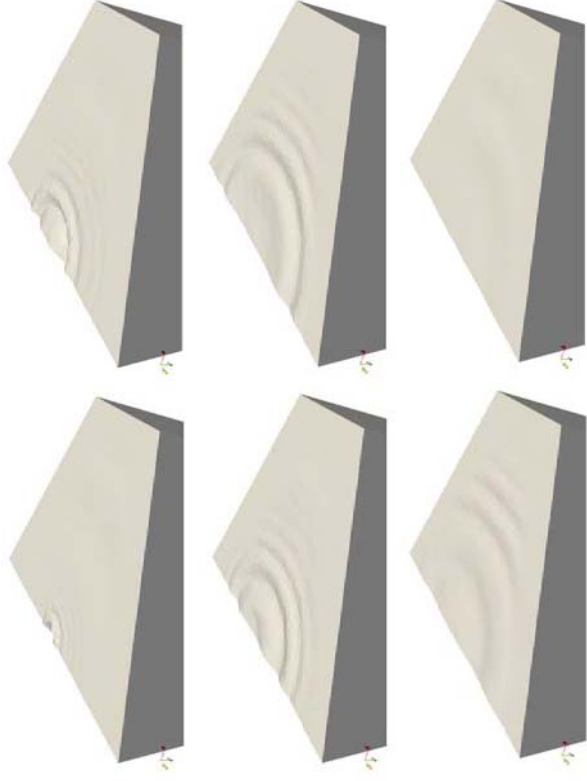
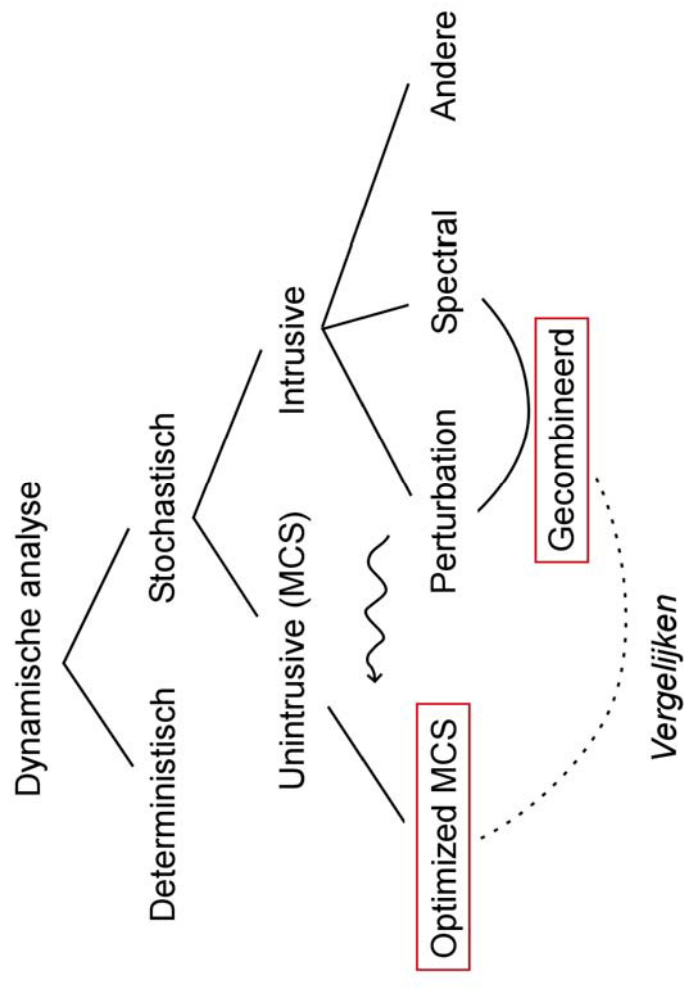


Fig. 23: Hoge damping in buitenste zone



Verbeteringen

Verbetering nodig omdat:

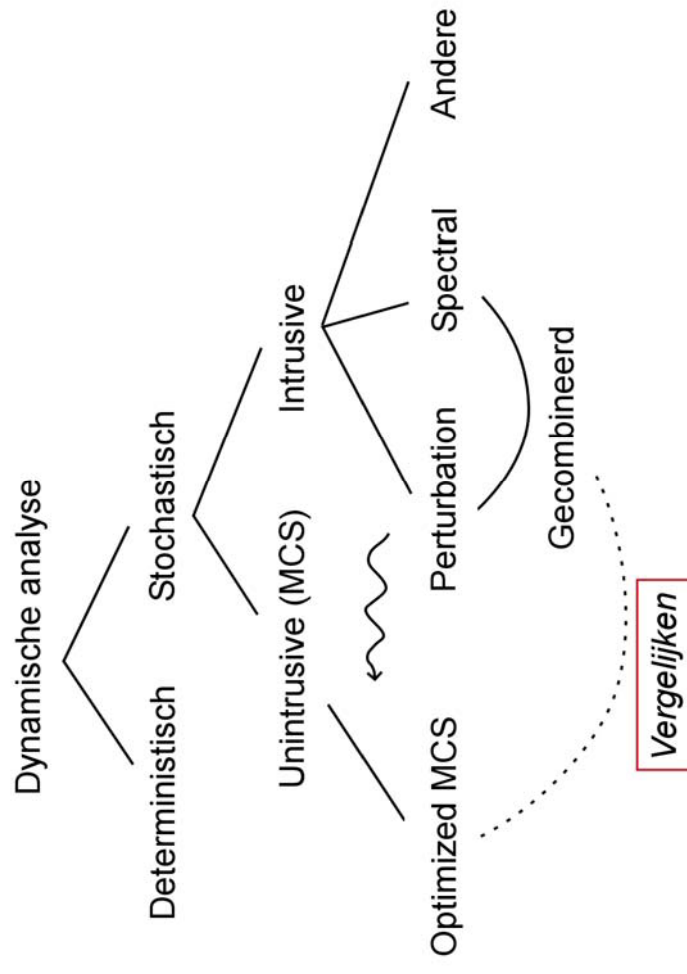
- *Perturbation method*: Groot aantal bijdrage vectoren te berekenen
- *Spectral method*: Groot systeem oplossen + alle vectoren opslaan

Nieuwe *gecombineerde methode*:

- Spectrale decompositie voor stijfheidsmatrix
- Taylor-reeks benadering voor verplaatsingsvector

Nieuwe *optimized MCS methode*:

- Genereer stijfheidsmatrix met *intrusive* method
- Gebruik iteratieve solver met preconditioner gebaseerd op deterministisch systeem



Case study – Resultaten

Resultaat op 40m afstand

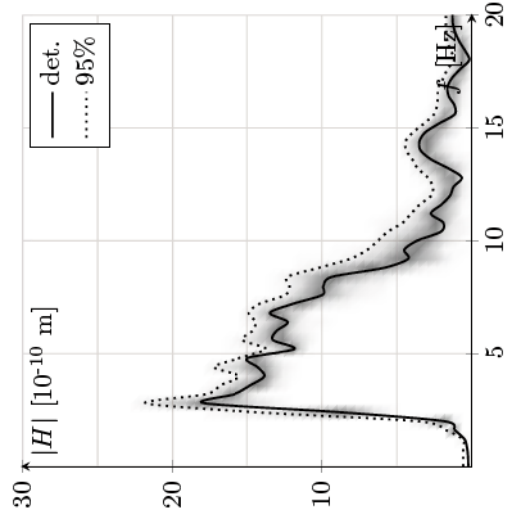


Fig. 24: Monte Carlo simulatie

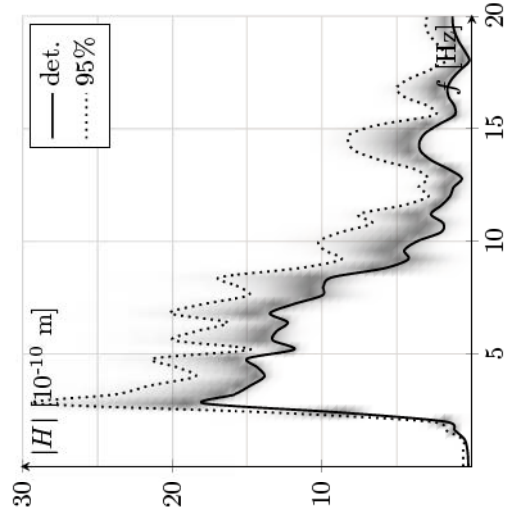


Fig. 25: Comb. 1e orde

Case study – Resultaten

Resultaat op 40m afstand

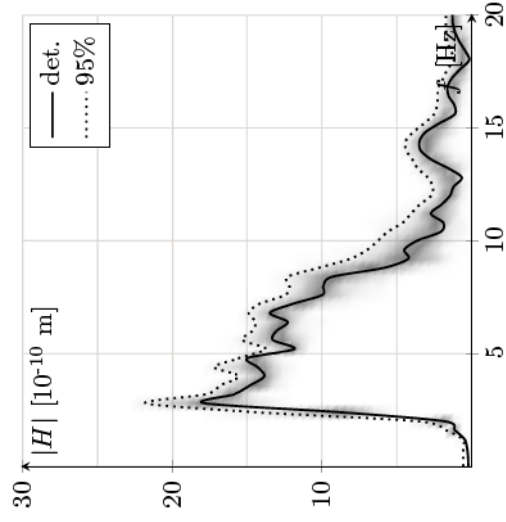


Fig. 26: Monte Carlo simulatie

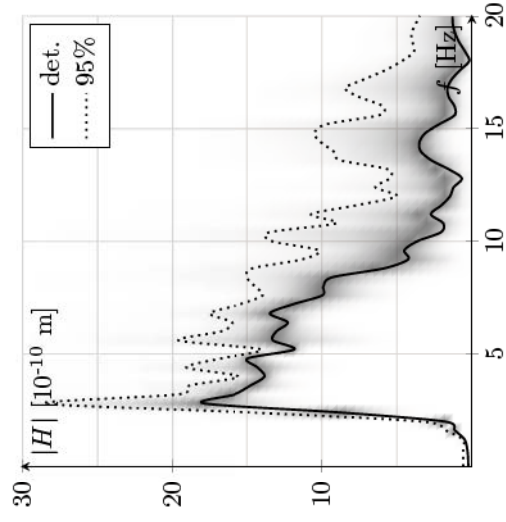


Fig. 27: Comb. 2e orde

Case study – Resultaten

Resultaat op 40m afstand

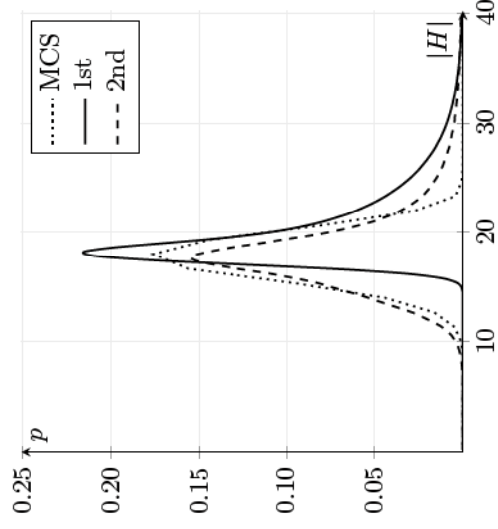


Fig. 28: PDF at 2.8 Hz, 40 m

Case study – Resultaten

Resultaat op 40m afstand

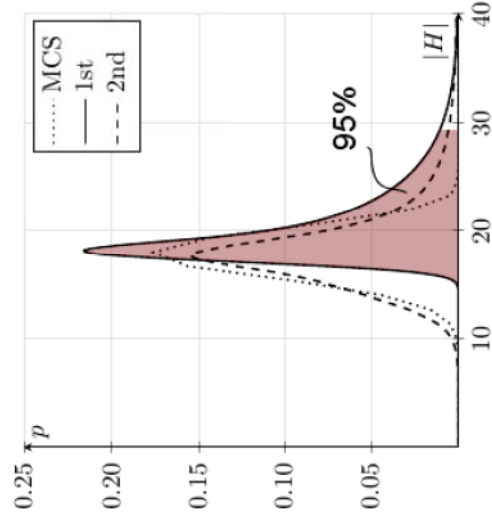


Fig. 1: PDF at 2.8 Hz, 40 m

Case study – Resultaten

Resultaat op 40m afstand

Amplitude is uitgedrukt als: $A = |\mathbf{u}| = \sqrt{\text{Re}(\mathbf{u})^2 + \text{Im}(\mathbf{u})^2}$

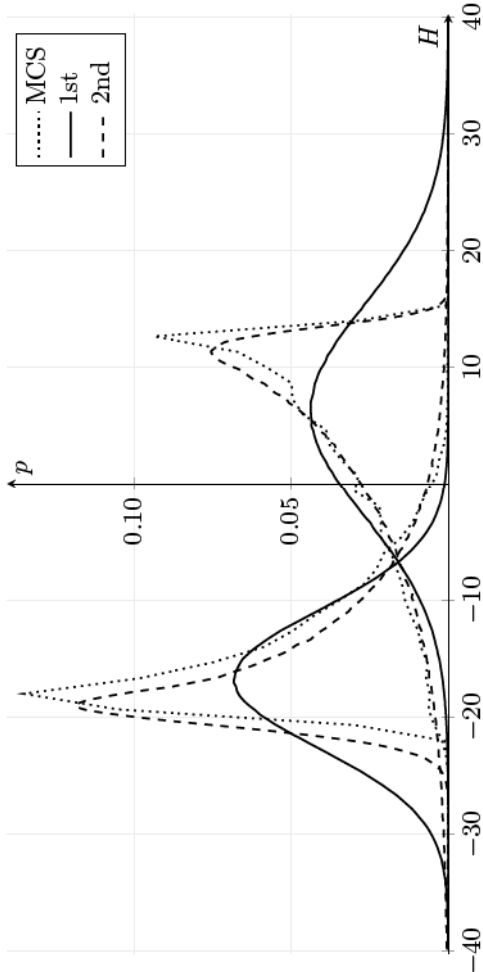


Fig. 29: PDF at 2.8 Hz, 40 m, real (r) and imaginary (l)

Case study – Resultaten

Rekentijd *spectrum* (100 realisaties):

- Optimized MCS: 184 min.
- Gecombineerde methode, 1e orde: 21 min.
- Gecombineerde methode, 2e orde: 162 min.
- Gecombineerde methode, 3e orde: - ← *duurde te lang!*

Rekentijd *kansdichtheidsfunctie*:

- Optimized MCS: 664 min. (10k realisaties)
- Gecombineerde methode, 1e orde: 16 min. (100k realisaties)
- Gecombineerde methode, 2e orde: 140 min.
- Gecombineerde methode, 3e orde: - ← *duurde te lang!*

Conclusie

Conclusie

We herkennen de *curse of dimensionality*:

- Aantal basis stochasten (groot domein)
- Orde van benadering (geëiste nauwkeurigheid)
- Monte Carlo simulatie minder last van

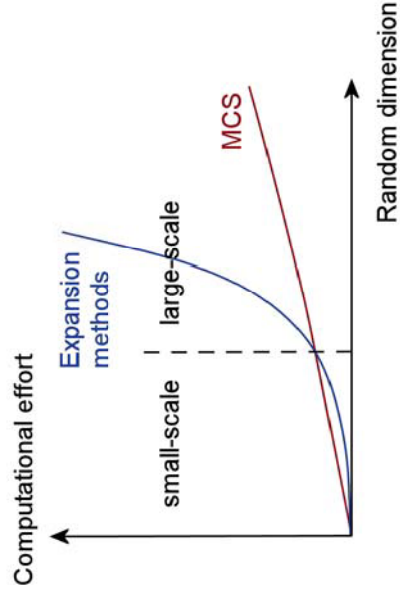


Fig. 30: Curse of dimensionality

Conclusie

Monte Carlo is ‘gewoon’ een numerieke integratie-methode

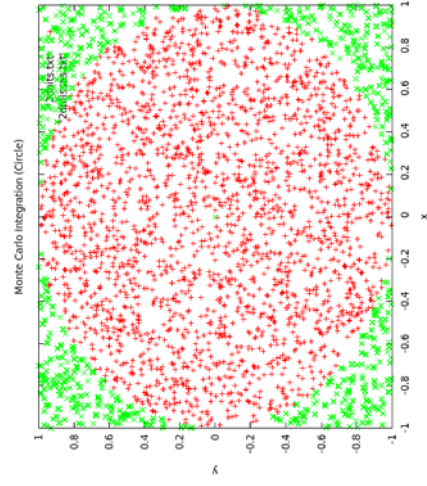


Fig. 31: Integratie 2D cirkel

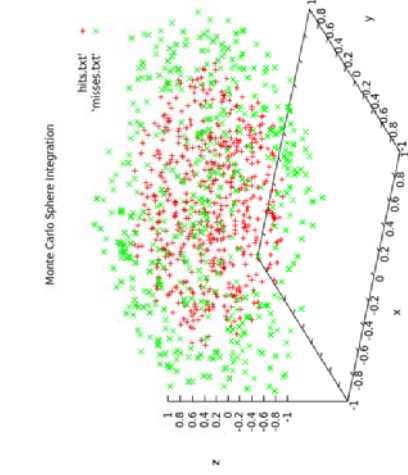


Fig. 32: Integratie 3D bol

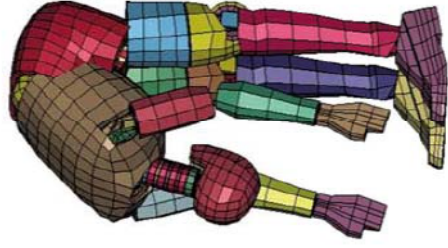
Conclusie

*Intrusive methoden helaas niet de juiste route
voor grootschalige problemen (in de dynamica).*

Verder onderzoek:

- De *optimized MCS* presteerde goed ($\sim 10\times$ reductie rekentijd)
 - Incomplete LU preconditioner
 - Iterative optimal reordering
 - Geschiktere solver gebruiken
- Vergelijk moderne MCS technieken
- Toepassing in analytische modellen

Vragen



Bedankt voor uw aandacht!

Zijn er nog vragen?